ΜΕΘΟΔΙΚΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 11/6/2018

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για $x \neq x_o$ έχουμε: $f(x) = \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}(x-x_o)+f(x_o)$. Επομένως:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o}\left[\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}(x-x_o)+f(x_o)\right] = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\cdot \lim_{x\to x_o}(x-x_o)+f(x_o) =$$

$$= f'(x_o)\cdot 0 + f(x_o) = f(x_o).$$

Άρα η f είναι συνεχής στο x_o.

Α2. α. Ψ

β. Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ είναι 1–1 αλλά όχι γνησίως μονότονη αφού για κάθε x ≤ 0 η f είναι γνησίως αύξουσα και για κάθε x>0 η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Α3. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta)-G(\alpha)$.

Α4. α) Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο **R*** ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων (πολυωνυμικής και ρητής) με $f'(x)=1+\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{x^3+8}{x^3}$.

Οι ρίζες της f' είναι: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3+8}{x^3}=0 \Leftrightarrow x^3+8=0 \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x=-2$

Ο πίνακας μεταβολής προσήμου της f' και μονοτονίας της f είναι:

	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f'	+	0	− ‖	+
f	↗		↘ ‖	↗
		Τ.Μ.		

Επειδή $f'(x)>0$ στο $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ και f συνεχής στο $(-\infty,-2]$ και στο $(0,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$ και στο $(0,+\infty)$. Επειδή $f'(x)<0$ στο $(-2,0)$ και f συνεχής στο $[-2,0)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$.

Επειδή $f'(x)>0$ στο $(-\infty,-2)$ και $f'(x)<0$ στο $(-2,0)$ και $f'(-2)=0$ άρα η f παρουσιάζει στο -2 τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-3$.

B2. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο **R*** (ως ρητή) με $f''(x)=-\frac{24}{x^4}<0$ οπότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$.

B3. Είναι: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x-\frac{4}{x^2}\right) = 0-(+\infty) = -\infty$. Άρα η x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

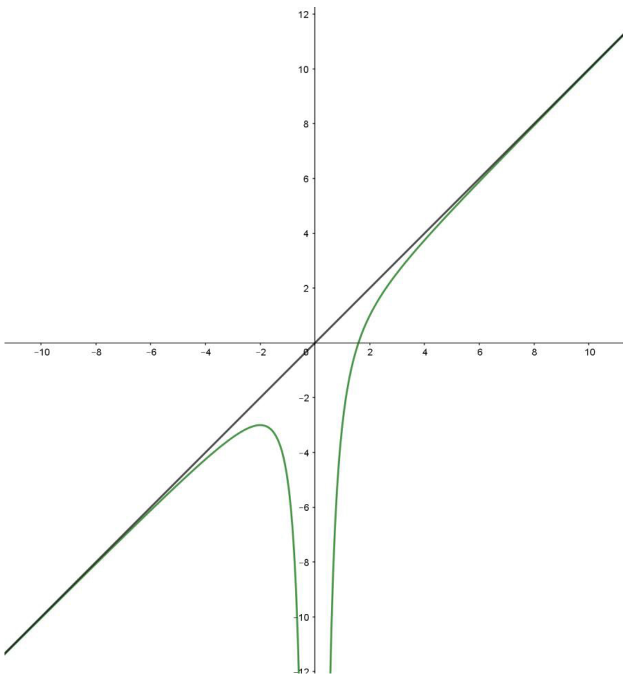
Επίσης είναι: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right) = 1-0 = 1$ και $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$

Ομοίως είναι: $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$ και $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = 0$

Επομένως η y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

B4.

Η γραφική παράσταση της f και των ασύμπτωτών της φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η περίμετρος του τετραγώνου είναι x οπότε η πλευρά του είναι $\frac{x}{4}$ και επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E_τ=\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}$.

Η περίμετρος του κύκλου είναι 8–x οπότε $8-x=2πr \Leftrightarrow r=\frac{8-x}{2π}$ όπου r η ακτίνα του κύκλου. Το εμβαδόν του κύκλου είναι:

$E_κ=πr^2=π\left(\frac{8-x}{2π}\right)^2=π\frac{64-16x+x^2}{4π^2}=\frac{x^2-16x+64}{4π}$

Επομένως η συνάρτηση που δίνει το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$E(x)=E_τ+E_κ=\frac{x^2}{16}+\frac{x^2-16x+64}{4π}=\frac{πx^2+4x^2-64x+256}{16π}=\frac{(π+4)x^2-64x+256}{16π}, x\in(0,8)$

Γ2. Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο (0,8) ως πολυωνυμική με:

$E'(x)=\frac{2(π+4)x-64}{16π}=\frac{(π+4)x-32}{8π}$

Οι ρίζες της E' είναι: $E'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{(π+4)x-32}{8π}=0 \Leftrightarrow (π+4)x-32=0 \Leftrightarrow x=\frac{32}{π+4}$

Ο πίνακας μεταβολής προσήμου της E' και μονοτονίας της E είναι:

	0	$\frac{32}{π+4}$	8
E'	$-$	0	$+$
E	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

Επειδή $E'(x)<0$ στο $\left(0,\frac{32}{π+4}\right)$ και E συνεχής στο $\left(0,\frac{32}{π+4}\right]$ η E είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{32}{π+4}\right]$. Επειδή $E'(x)>0$ στο $\left(\frac{32}{π+4},8\right)$ και E συνεχής στο $\left[\frac{32}{π+4},8\right)$ η E είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{32}{π+4},8\right)$.

Επειδή $E'(x)<0$ στο $\left(0,\frac{32}{π+4}\right)$ και $E'(x)>0$ στο $\left(\frac{32}{π+4},8\right)$ και $E'\left(\frac{32}{π+4}\right)=0$ άρα η E παρουσιάζει στο $\frac{32}{π+4}$ ολικό ελάχιστο.

Για $x=\frac{32}{π+4}$ η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4}=\frac{\frac{32}{π+4}}{4}=\frac{8}{π+4}$ και η διάμετρος του κύκλου είναι $2r=2\frac{8-x}{2π}=\frac{8-x}{π}=\frac{8-\frac{32}{π+4}}{π}=\frac{\frac{8π+32-32}{π+4}}{π}=\frac{8π}{π(π+4)}=\frac{8}{π+4}$.

Άρα για $x=\dfrac{32}{\pi+4}$ δηλ. όταν το E(x) ελαχιστοποιείται η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με την διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Είναι $E\left(\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right)\right)=\left(\lim\limits_{x\to\frac{32}{\pi+4}^-}E(x),\ \lim\limits_{x\to 0^+}E(x)\right)=\left(\dfrac{16}{\pi+4},\dfrac{16}{\pi}\right)$ και

$$E\left(\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)\right)=\left[E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to 8^-}E(x)\right)=\left[\dfrac{16}{\pi+4},4\right)$$

Επειδή $5\in E\left(\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right)\right)=\left(\dfrac{16}{\pi+4},\dfrac{16}{\pi}\right)$ (αφού $\pi<3{,}2<\pi+4 \Leftrightarrow \pi<\dfrac{16}{5}<\pi+4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\pi}>\dfrac{5}{16}>\dfrac{1}{\pi+4}\Leftrightarrow \dfrac{16}{\pi}>5>\dfrac{16}{\pi+4}$) και E γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right)$ άρα υπάρχει μοναδικό $\rho\in\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right)$ τέτοιο ώστε E(ρ)=5.

Επειδή $5\notin E\left(\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)\right)=\left[\dfrac{16}{\pi+4},4\right)$ άρα η εξίσωση E(x)=5 δεν έχει ρίζα στο $\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$.

Επομένως η εξίσωση E(x)=5 έχει μία ακριβώς ρίζα στο (0,8).

<u>**ΘΕΜΑ Δ**</u>

Δ1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο **R** (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x$ και $f''(x)=2e^{x-\alpha}-2$.

Οι ρίζες της f'' είναι: $f''(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2=0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}=1 \Leftrightarrow x-\alpha=0 \Leftrightarrow x=\alpha$

Ο πίνακας μεταβολής προσήμου της f'' και κυρτότητας της f είναι:

	$-\infty$	α	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$

Επειδή $f''(x)<0$ στο $(-\infty,\alpha)$ και f συνεχής στο $(-\infty,\alpha]$ η f είναι κοίλη στο $(-\infty,\alpha]$. Επειδή $f''(x)>0$ στο $(\alpha,+\infty)$ και f συνεχής στο $[\alpha,+\infty)$ η f είναι κυρτή στο $[\alpha,+\infty)$.

Επειδή $f''(x)<0$ στο $(-\infty,\alpha)$ και $f''(x)>0$ στο $(\alpha,+\infty)$ και $f''(\alpha)=0$ άρα η f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $A(\alpha,2-\alpha^2)$.

Δ2. Επειδή $f''(x)<0$ στο $(-\infty,\alpha)$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\alpha]$. Επειδή $f''(x)>0$ στο $(\alpha,+\infty)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x-\alpha}-2x\right)=2\cdot 0-2(-\infty)=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2e^{x-\alpha}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[2x\left(\frac{e^{x-\alpha}}{x}-1\right)\right] = 2(+\infty)\left((+\infty)-1\right) = +\infty \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-\alpha}}{x} \overset{DLH}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{x-\alpha}\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} e^{x-\alpha} = +\infty$$

Επίσης είναι: $f'\left((-\infty,\alpha]\right) = \left[f(\alpha), \lim_{x\to-\infty} f'(x)\right) = [2-2\alpha,+\infty)$ και

$$f'\left((\alpha,+\infty)\right) = \left(\lim_{x\to\alpha^+} f'(x), \lim_{x\to+\infty} f'(x)\right) = (2-2\alpha,+\infty)$$

Επειδή $0 \in f'\left((-\infty,\alpha]\right) = [2-2\alpha,+\infty)$ (αφού $\alpha>1 \Leftrightarrow -2\alpha<-2 \Leftrightarrow 2-2\alpha<0$) και f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\alpha]$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-\infty,\alpha)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$.

Επειδή $0 \in f'\left((\alpha,+\infty)\right) = (2-2\alpha,+\infty)$ και f' γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,+\infty)$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (\alpha,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2)=0$.

Για κάθε $x<x_1 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x)>0$

Για κάθε $x_1<x<\alpha \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x)<0$

Για κάθε $\alpha<x<x_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x)<0$

Για κάθε $x>x_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x)>0$

Ο πίνακας μεταβολής προσήμου της f' και μονοτονίας της f είναι:

	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
f'		+	0	−		−	0	+	
f		↗		↘		↘		↗	
			Τ.Μ.				Τ.Ε.		

Επειδή $f'(x)>0$ στο $(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$ και f συνεχής στο $(-\infty,x_1]$ και στο $[x_2,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,x_1]$ και στο $[x_2,+\infty)$. Επειδή $f'(x)<0$ στο (x_1,x_2) και f συνεχής στο $[x_1,x_2]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1,x_2]$.

Επειδή $f'(x)>0$ στο $(-\infty,x_1)$ και $f'(x)<0$ στο (x_1,x_2) και $f'(x_1)=0$ άρα η f παρουσιάζει στο x_1 τοπικό μέγιστο.

Επειδή $f'(x)<0$ στο (x_1,x_2) και $f'(x)>0$ στο $(x_2,+\infty)$ και $f'(x_2)=0$ άρα η f παρουσιάζει στο x_2 τοπικό ελάχιστο.

Δ3. Έστω $x_1>1 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x_1)<f'(1) \Leftrightarrow f'(1)>0 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha}-2>0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha}>1 \Leftrightarrow 1-\alpha>0 \Leftrightarrow \alpha<1$ που είναι άτοπο. Άρα $1 \in (x_1,\alpha)$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (x_1,x_2) άρα θα είναι και 1–1 στο διάστημα αυτό.

Έχουμε $f(x)=f(1) \Leftrightarrow x=1$ η οποία απορρίπτεται αφού $1 \notin (\alpha,x_2)$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη.

Δ4. Για α=2 είναι: $f(x)=2e^{x-2}-x^2$ και $f'(x)=2e^{x-2}-2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(2,f(2)) είναι:

ε: $y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y+2=-2(x-2) \Leftrightarrow y=-2x+2$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[2,+\infty)$ άρα η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της ε με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Άρα για κάθε $x\in[2,+\infty)$ ισχύει:
$f(x)\ge y \Leftrightarrow f(x)\ge -2x+2 \Leftrightarrow f(x)\sqrt{x-2}\ge(-2x+2)\sqrt{x-2}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x=2.

Επομένως θα' ναι:

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx$$

Στο ολοκλήρωμα $\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx$ θέτουμε $u=\sqrt{x-2} \Leftrightarrow u^2=x-2 \Leftrightarrow x=u^2+2$ οπότε dx=2udu. Για x=2 είναι u=0 και για x=3 είναι u=1. Άρα:

$$\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx=\int_0^1 \left(-2\left(u^2+2\right)+2\right)u\cdot 2u=\int_0^1 2u^2\left(-2u^2-2\right)du=-4\int_0^1\left(u^4+u^2\right)du=$$

$$-4\left[\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}\right]_0^1=-4\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=-4\frac{8}{15}=-\frac{32}{15}$$

Άρα: $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -\frac{32}{15}$

ΤΕΛΑΚΗΣ ΗΛΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 6/9/2018

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $f'(x)>0$ για κάθε $x\in (\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$.

__ Επειδή η f είναι συνεχής στο x_o θα 'ναι και γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_o]$ και $[x_o,\beta)$. Άρα για $x_1<x_o<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_o)<f(x_2)$ οπότε το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f.

__ Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(\alpha,x_o]$ και $[x_o,\beta)$ τότε:

αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_o]$ με $x_1<x_2$ θα 'ναι $f(x_1)<f(x_2)$,

αν $x_1,x_2\in[x_o,\beta)$ με $x_1<x_2$ θα 'ναι $f(x_1)<f(x_2)$,

αν $x_1\in(\alpha,x_o]$ και $x_2\in[x_o,\beta)$ με $x_1<x_o<x_2$ θα 'ναι $f(x_1)<f(x_o)<f(x_2)$ δηλ. $f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ανάλογη είναι η απόδειξη αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in (\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$.

Α2. Έστω Α ένα υποσύνολο του **R**. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με πεδίο ορισμού το Α μία διαδικασία f, με την οποία κάθε στοιχείο $x\in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με f(x). Την διαδικασία αυτή την εκφράζουμε $f: A\to \mathbf{R}$.

Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του Α λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Το σύνολο που έχει στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x\in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με f(A). Είναι δηλ.: $f(A)=\{y/y=f(x)$ για κάποιο $x\in A\}$.

Α3. Η Τ είναι παράγωγος της f και η Η είναι παράγωγος της g.

Α4. α. Ψ

β. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $x>0$ και $g(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$, $x>0$. Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=1-(+\infty)=-\infty$. Όμως :

$$\lim_{x\to 0}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+1-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}1=1\neq 0$$

Α5. α) Σωστό **β)** Σωστό **γ)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το **R**. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική και είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως ρητή. Για να είναι η f συνεχής στο **R** πρέπει η f να είναι συνεχής στο 1. Άρα πρέπει:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\left(x^2+\alpha\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x} = 1+\alpha \Leftrightarrow 1+\alpha = \frac{1+1}{1} = 1+\alpha \Leftrightarrow 1+\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Β2. Για α=1 είναι $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x}, & x>1 \\ x^2+1, & x\le 1 \end{cases}$

__ Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},4\right]$ αφού είναι συνεχής στο **R**

__ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4}+1 = \frac{5}{4}$ και $f(4) = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$ οπότε $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(4)$

__ Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},4\right)$ πρέπει η f να είναι παραγωγίσιμη στο 1. Είναι:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x+1}{x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x+1-2x}{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{1}{x}\right) = -1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.
Επομένως δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ. Rolle.

Β3. Η παράγωγος της f είναι: $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2}, & x>1 \\ 2x, & x<1 \end{cases}$.

Τα σημεία στα οποία οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλες προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$ είναι αυτά για τα οποία ισχύει $f'(x)=-\frac{1}{4}$ με $x\neq 1$. Είναι:

$$f'(x)=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=2, & x>1 \\ 2x = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{8}, & x<1 \end{cases}.$$

Επομένως τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A\left(2,f(2)\right) \equiv A\left(2,\frac{3}{2}\right)$ και $B\left(-\frac{1}{8},f\left(-\frac{1}{8}\right)\right) \equiv B\left(-\frac{1}{8},\frac{65}{64}\right)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο Α είναι:
$y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-\frac{3}{2} = -\frac{1}{4}(x-2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x+2$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο Α είναι:
$$y-f\left(-\frac{1}{8}\right) = f'\left(-\frac{1}{8}\right)\left(x+\frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow y-\frac{65}{64} = -\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x+\frac{63}{64}$$

Β4. Επειδή η f είναι συνεχής στο **R** δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

ΜΕΘΟΔΙΚΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

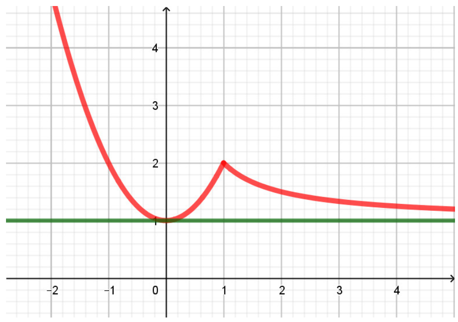
Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x+1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$

Άρα η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Επίσης είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ οπότε η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$.

Η γραφική παράσταση της f είναι:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο [0,π] με $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x-1$.

Οι ρίζες της f΄ είναι: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x-1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\dfrac{1}{2} \overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} x=\dfrac{\pi}{3}$

Ο πίνακας μεταβολής προσήμου της f΄ και μονοτονίας της f είναι:

	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f΄		+	0	−	
f		↗		↘	
	Τ.Ε.		Ο.Μ.		Ο.Ε.

Επειδή $f'(x)>0$ στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$. Επειδή $f'(x)<0$ στο $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$.

Επειδή $f'(x)>0$ στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ και $f'(x)<0$ στο $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right]$ και $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$ άρα η f παρουσιάζει στο $\frac{\pi}{3}$ ολικό μέγιστο με $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$, ολικό ελάχιστο στο π με f(π)=−π και τοπικό ελάχιστο στο 0 με f(0)=0.

Γ2. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [0,π] με $f''(x)=-2\eta\mu x<0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$, οπότε η f είναι κοίλη στο [0,π] και επομένως η εφαπτομένη της βρίσκεται πάνω από την C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής $A(x_o,f(x_o))$. Άρα η C_f και η εφαπτομένη της στο Α έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Γ3.

$$\int_0^{\pi} f(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int_0^{\pi}(2\eta\mu x - x)\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int_0^{\pi}(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - x\sigma\upsilon\nu x)dx = \int_0^{\pi}2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\,dx - \int_0^{\pi}x\sigma\upsilon\nu x\,dx =$$

$$\left[\eta\mu^2 x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}x(\eta\mu x)'\,dx = 0 - \left[x\eta\mu x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}(x)'\,\eta\mu x\,dx = 0 - 0 + \int_0^{\pi}\eta\mu x\,dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} = -(-1)+1 = 2$$

Γ4. α. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\eta\mu x - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(2\dfrac{\eta\mu x}{x} - 1\right) = 2\cdot 1 - 1 = 1$

β. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\eta\mu 2x - 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(4\frac{\eta\mu 2x}{2x} - 2\right) \overset{u=2x}{=} \lim_{u\to 0}\left(4\frac{\eta\mu u}{u} - 2\right) = 4\cdot 1 - 2 = 2 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0}(x\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0}\left[(f(x) - f(2x))\ln x\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x) - f(2x)}{x}\cdot x\ln x\right] = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(2x)}{x}\right)x\ln x\right] = (1-2)\cdot 0 = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$, $x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} > 0$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) > \dfrac{x}{x+1}$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} \overset{(\alpha)}{<} 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε είναι και 1–1 και άρα αντιστρέφεται.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln(x+1))'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{0+1} = 1$ και

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+1)}{x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln(x+1))'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x+1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της f είναι το σύνολο τιμών της f.

Άρα: $D_{f^{-1}} = f((0,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = (0,1)$

Δ3. Επειδή $f((0,+\infty)) = (0,1)$ άρα για κάθε $x>0$ θα' ναι:

$$f(x) < 1 \overset{f:\downarrow}{\Leftrightarrow} f(f(x)) > f(1) \Leftrightarrow \frac{\ln(f(x)+1)}{f(x)} > \ln 2 \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \ln(f(x)+1) > f(x)\ln 2 \Leftrightarrow \ln(f(x)+1) > \ln 2^{f(x)} \Leftrightarrow$$

$$f(x)+1 > 2^{f(x)} \Leftrightarrow f(x) > 2^{f(x)} - 1.$$

Δ4. Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού:

$$h(x)=x(x-2)f(\alpha)+x(x-1)f^{-1}(\alpha)+(x-1)(x-2)\eta\mu(\pi\alpha),\ x\in[0,2] \text{ και } 0<\alpha<1.$$

<u>Θ. Bolzano για την h στα [0,1] και [1,2]</u>

__ Η h είναι συνεχής στα [0,1] και [1,2] ως πολυωνυμική.

__ $h(0)=2\eta\mu(\pi\alpha)>0$ γιατί $0<\alpha<1 \Leftrightarrow 0<\alpha\pi<\pi$ οπότε $\eta\mu(\pi\alpha)>0$

$h(1)=-f(\alpha)<0$ γιατί το σύνολο τιμών της f είναι το (0,1) οπότε $f(\alpha)>0 \Leftrightarrow -f(\alpha)<0$

$h(2)=f^{-1}(\alpha)>0$ γιατί το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f δηλ. το $(0,+\infty)$ οπότε

$f^{-1}(\alpha)>0$

Άρα $h(0)h(1)<0$ και $h(1)h(2)<0$

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_1)=0$ και υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $h(x_2)=0$.

Επειδή η h είναι πολυωνυμική δευτέρου άρα οι ρίζες της x_1,x_2 είναι μοναδικές.
Επομένως η εξίσωση:

$$h(x)=0 \Leftrightarrow x(x-2)f(\alpha)+x(x-1)f^{-1}(\alpha)+(x-1)(x-2)\eta\mu(\pi\alpha)=0 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x}=0$$

έχει δύο ακριβώς ρίζες, μία στο (0,1) και μία στο (1,2).

Δ5. Αφού F αρχική της f στο $(0,+\infty)$ άρα $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x>0$.

<u>Θ.Μ.Τ. για την F στο [1,e]</u>

__ Η F είναι συνεχής στο [1,e] αφού είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

__ Η F είναι παραγωγίσιμη στο (1,e) αφού είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi)=\dfrac{F(e)-F(1)}{e-1} \Leftrightarrow f(\xi)=\dfrac{e\ln 2-F(1)}{e-1}$

Είναι:

$$1<\xi \overset{f:\downarrow}{\Leftrightarrow} f(1)>f(\xi) \Leftrightarrow \ln 2>\frac{e\ln 2-F(1)}{e-1} \Leftrightarrow (e-1)\ln 2>e\ln 2-F(1) \Leftrightarrow$$
$$(e-1)\ln 2-e\ln 2>-F(1) \Leftrightarrow e\ln 2-(e-1)\ln 2<F(1) \Leftrightarrow$$
$$e\ln 2-e\ln 2+\ln 2<F(1) \Leftrightarrow \ln 2<F(1) \qquad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=F(x)-xf(x)$, $x>0$.
Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\varphi'(x)=F'(x)-f(x)-xf'(x)=f(x)-f(x)-xf'(x)=-xf'(x)>0$ για κάθε $x>0$.
Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι: $e>1 \overset{\varphi:\uparrow}{\Leftrightarrow} \varphi(e)>\varphi(1) \Leftrightarrow F(e)-ef(e)>F(1)-f(1) \Leftrightarrow e\ln 2-e\dfrac{\ln(e+1)}{e}>F(1)-\ln 2 \Leftrightarrow$

$$\ln 2^e+\ln 2-\ln(e+1)>F(1) \Leftrightarrow F(1)<\ln\frac{2^{e+1}}{e+1} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει: $\ln 2<F(1)<\ln\left(\dfrac{2^{e+1}}{e+1}\right)$ για κάθε $x>0$.

ΤΕΛΑΚΗΣ ΗΛΙΑΣ