ΜΕΘΟΔΙΚΟ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 9/6/2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω x_1, $x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$. Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., επομένως υπάρχει $x_o \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_o)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Rightarrow f'(x_o)(x_2-x_1)=f(x_2)-f(x_1).$$

Όμως είναι: $\begin{cases} f'(x_o)>0 \\ x_2-x_1>0 \end{cases}$ οπότε $f'(x_o)(x_2-x_1)>0 \Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1)>0 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Δηλαδή για $x_1<x_2$ προκύπτει $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

Α2. α. Ψ

β. Η πρόταση είναι ψευδής για υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς σ' ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού τους αλλά δεν είναι παραγωγίσιμες στο x_o. Ως αντιπαράδειγμα παίρνουμε τη συνάρτηση του θέματος **Δ** $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1,0) \\ e^x ημx, & x \in [0,π] \end{cases}$,

η οποία είναι συνεχής στο 0 άλλα όχι παραγωγίσιμη στο 0.

Α3. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα [α,β]**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim_{x \to α^+} f(x)=f(α)$ και $\lim_{x \to β^-} f(x)=f(β)$.

Α4. α) Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πεδίο ορισμού της fog είναι:

D_{fog}: $\begin{cases} x \neq 1 \\ κ' \\ g(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x}>0 \Leftrightarrow x(1-x)>0 \Leftrightarrow x-x^2>0 \Leftrightarrow x \in (0,1) \end{cases}$. Άρα $D_{fog}=(0,1)$.

Ο τύπος της fog είναι: $(fog)(x)=f(g(x))=\ln g(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0,1)$.

Β2. Η h είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) ως σύνθεση παραγωγίσιμων με:

$$h'(x)=\left(\ln\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{\frac{x}{1-x}}\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{(x)'(1-x)-x(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1-x+x}{1-x}=\frac{1}{x(1-x)}>0$$

για κάθε $x\in(0,1)$.

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ οπότε είναι και 1−1 και άρα αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης h^{-1} της h είναι το σύνολο τιμών της h. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln\frac{x}{1-x}\overset{u=\frac{x}{1-x}}{=}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$$

και

$$\lim_{x\to 1^-} h(x)=\lim_{x\to 1^-}\ln\frac{x}{1-x}\overset{u=\frac{x}{1-x}}{=}\lim_{u\to +\infty}\ln u=+\infty$$

Επομένως:

$$D_{f^{-1}}=h((0,1))=\left(\lim_{x\to 0^+} h(x),\lim_{x\to 1^-} h(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$$

Θέτουμε στην h όπου x το $h^{-1}(x)$ οπότε έχουμε:

$$h\left(h^{-1}(x)\right)=\ln\frac{h^{-1}(x)}{1-h^{-1}(x)}\Leftrightarrow x=\ln\frac{h^{-1}(x)}{1-h^{-1}(x)}\Leftrightarrow e^x=\frac{h^{-1}(x)}{1-h^{-1}(x)}\Leftrightarrow e^x-e^xh^{-1}(x)=h^{-1}(x)\Leftrightarrow$$

$$h^{-1}(x)+e^xh^{-1}(x)=e^x\Leftrightarrow\left(e^x+1\right)h^{-1}(x)=e^x\Leftrightarrow h^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbf{R}.$$

B3. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο **R** ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\varphi'(x)=\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)'=\frac{\left(e^x\right)'\left(e^x+1\right)-e^x\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^xe^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0$$

για κάθε $x\in\mathbf{R}$.
Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο **R** οπότε δεν έχει ακρότατα.

Η φ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο **R** αφού η φ' είναι πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\varphi''(x)=\left(\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\right)'$$

$$=\frac{\left(e^x\right)'\left(e^x+1\right)^2-e^x\left(\left(e^x+1\right)^2\right)'}{\left(e^x+1\right)^4}=\frac{e^x\left(e^x+1\right)^2-e^x\cdot 2\left(e^x+1\right)\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^4}=\frac{e^x\left(e^x+1\right)^2-2e^x\left(e^x+1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^4}=$$

$$\frac{\left(e^x+1\right)\left[e^x\left(e^x+1\right)-2e^{2x}\right]}{\left(e^x+1\right)^4}=\frac{e^{2x}+e^x-2e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^3}=\frac{e^x-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^3}=\frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}$$

Οι ρίζες της φ'' είναι:

$$\varphi''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}=0 \Leftrightarrow 1-e^x=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow e^x=e^0 \Leftrightarrow x=0.$$

Ο πίνακας μεταβολής προσήμου της φ'' και κυρτότητας της φ είναι:

	$-\infty$	0	$+\infty$
φ''	+	0	−
φ		Σ.Κ.	

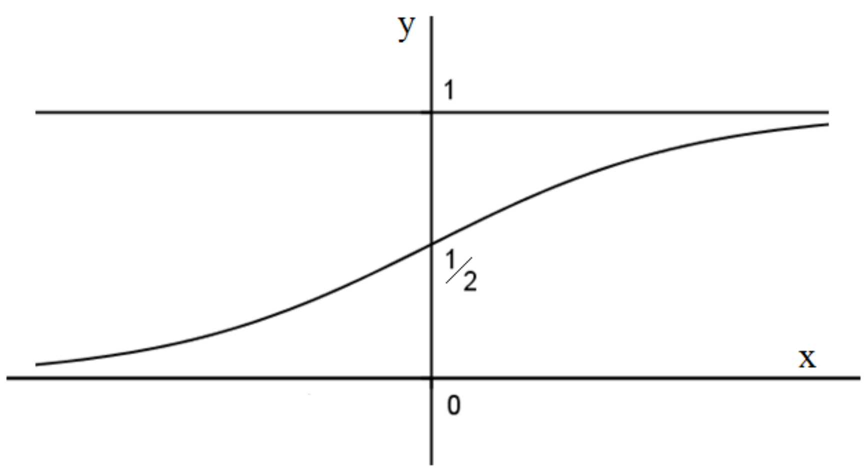
Επειδή $\varphi''(x)>0$ στο $(-\infty,0)$ άρα η φ είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και επειδή $\varphi''(x)<0$ στο $(0,+\infty)$ άρα η φ είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Επειδή $\varphi''(x)>0$ στο $(-\infty,0)$ και $\varphi''(x)<0$ στο $(0,+\infty)$ και $\varphi''(0)=0$ άρα η φ παρουσιάζει στο 0 σημείο καμπής το $\varphi(0)=\frac{1}{2}$ δηλ. στο σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Β4. Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{0}{0+1}=0$ οπότε η ευθεία y=0 (άξονας x'x) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $-\infty$.

Επίσης είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x\left(1+e^{-x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{1}{1+0}=1$ οπότε η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $+\infty$.

Η γραφική παράσταση της φ και των ασύμπτωτων της φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ ως τριγωνομετρική με $f'(x)=-\text{συν}x$, $x\in[0,\pi]$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f σ’ ένα σημείο της $M(x_o,f(x_o))$ είναι:

ε: $y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o) \Leftrightarrow y+\text{ημ}x_o=-\text{συν}x_o(x-x_o)$ (1)

Επειδή το σημείο Α είναι σημείο της ε άρα οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν οπότε:

$$-\frac{\pi}{2}+\text{ημ}x_o=-\text{συν}x_o\left(\frac{\pi}{2}-x_o\right)\Leftrightarrow \text{συν}x_o\left(\frac{\pi}{2}-x_o\right)+\text{ημ}x_o-\frac{\pi}{2}=0.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο τιμές του $x_o\in[0,\pi]$ που να επαληθεύει την παραπάνω σχέση.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\text{συν}x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\text{ημ}x-\frac{\pi}{2}$, $x\in[0,\pi]$. Αρκεί να δείξουμε ότι η g έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $[0,\pi]$.

α’ τρόπος

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων (τριγωνομετρικών και πολυωνυμικής) με:

$$g'(x)=\left(\text{συν}x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\text{ημ}x-\frac{\pi}{2}\right)'=(\text{συν}x)'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\text{συν}x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'+\text{συν}x-0=$$
$$-\text{ημ}x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\text{συν}x+\text{συν}x=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\text{ημ}x,\ x\in[0,\pi].$$

Οι ρίζες της g' είναι:

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\text{ημ}x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{\pi}{2}=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\\ \text{ή}\\ \text{ημ}x=0\overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow}x=0\quad\text{ή}\quad x=\pi\end{cases}$$

Ο πίνακας μεταβολής προσήμου της g' και μονοτονίας της g είναι:

	0		$\frac{\pi}{2}$		π
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	
	Ο.Μ.		Ο.Ε.		Ο.Μ.

Επειδή $g'(x)<0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και g συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Επειδή $g'(x)>0$ στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ και g συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Επειδή $g'(x)<0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $g'(x)>0$ στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ και $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ άρα η g παρουσιάζει στο $\frac{\pi}{2}$ ολικό ελάχιστο το $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi}{2}$.

Επειδή $g'(x)<0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $g'(x)>0$ στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ και τα 0 και π είναι άκρα κλειστού διαστήματος του πεδίου ορισμού της g άρα η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0 και στο π το $g(0)=g(\pi)=0$

Για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύει $\varphi(x)\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x=0 ή x=π.

β' τρόπος
Η g έχει προφανείς ρίζες τις x=0 και x=π.

Έστω ότι η g έχει 3 ρίζες $\rho_1,\rho_2,\rho_3\in[0,\pi]$ με $0=\rho_1<\rho_2<\rho_3=\pi$.

Θ. Rolle για την g στα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$

- Η g είναι συνεχής στα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων (τριγωνομετρικών και πολυωνυμικής)
- Η g είναι παραγωγίσιμη στα (ρ_1,ρ_2) και (ρ_2,ρ_3) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων (τριγωνομετρικών και πολυωνυμικής) με $g'(x)=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x$
- $g(\rho_1)=g(\rho_2)=g(\rho_3)=0$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_1)=0$ και
υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_2)=0$

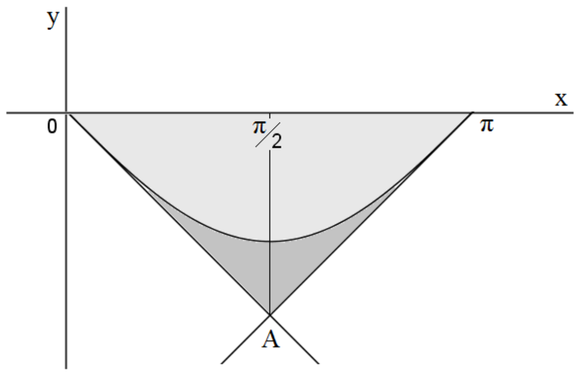
Άρα αποδείξαμε ότι η g' έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (0,π) που είναι άτοπο γιατί η g' έχει μία μόνο ρίζα στο (0,π) την $x=\frac{\pi}{2}$ αφού ημx>0 στο (0,π).

Άρα η g έχει δύο ακριβώς ρίζες τις x=0 και x=π, οπότε το x_o παίρνει ακριβώς δύο τιμές τις $x_o=0$ και $x_o=\pi$.

Για $x_o=0$ από την (1) προκύπτει ότι ε_1: $y+\eta\mu 0=-\sigma\upsilon\nu 0(x-0)\Leftrightarrow y=-x$.

Για $x_o=\pi$ από την (1) προκύπτει ότι ε_1: $y+\eta\mu\pi=-\sigma\upsilon\nu\pi(x-\pi)\Leftrightarrow y=x-\pi$.

Γ2.



Έστω οι συναρτήσεις $\varphi(x)=f(x)+x$, $\kappa(x)=f(x)-x+\pi$ για $x\in[0,\pi]$.

Για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύει: $\eta\mu x \le x \Leftrightarrow -\eta\mu x \ge -x \Leftrightarrow f(x)\ge -x \Leftrightarrow f(x)+x\ge 0 \Leftrightarrow \varphi(x)\ge 0$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ ως τριγωνομετρική με:
$f''(x)=(-\eta\mu x)''=(-\sigma\upsilon\nu x)'=\eta\mu x\ge 0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$

Άρα η f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$ οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της ε_2 με εξαίρεση το σημείο επαφής της.
Επομένως $f(x)\ge x-\pi \Leftrightarrow f(x)-x+\pi\ge 0 \Leftrightarrow \kappa(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$

Το εμβαδόν E_1 είναι:

$$E_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\varphi(x)|dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\kappa(x)|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\kappa(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x)+x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(f(x)-x+\pi)dx=$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\eta\mu x+x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\eta\mu x-x+\pi)dx=\left[\sigma\upsilon\nu x+\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\sigma\upsilon\nu x-\frac{x^2}{2}+\pi x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\ldots=\frac{\pi^2-8}{4}$$

Για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύει: $\eta\mu x\ge 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x\le 0 \Leftrightarrow f(x)\le 0$.

Το εμβαδόν E_2 είναι:

$$E_2=\int_0^{\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\pi}-f(x)dx=\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=[-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}=2$$

Άρα: $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{\frac{\pi^2-8}{4}}{2}=\dfrac{\pi^2-8}{8}=\dfrac{\pi^2}{8}-1$.

Γ3. Είναι: $\lim\limits_{x\to\pi}(f(x)+x)=f(\pi)+\pi=0+\pi=\pi$ και

$$\lim_{x\to\pi}(f(x)-x+\pi)=\lim_{x\to\pi^-}(f(x)-x+\pi)=f(\pi)-\pi+\pi=0$$

Επειδή για κάθε $x\in[0,\pi)$ ισχύει $f(x)-x+\pi>0$ άρα $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{1}{f(x)-x+\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{f(x)-x+\pi}=+\infty$.

Άρα: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\left((f(x)+x)\dfrac{1}{f(x)-x+\pi}\right)=\pi\cdot(+\infty)=+\infty$.

Γ4. *α' τρόπος:*

Επειδή για κάθε $x\in[1,e]\subset[0,\pi]$ ισχύει $f(x)>x-\pi \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}>1-\dfrac{\pi}{x}$ άρα:

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>[x-\pi\ln x]_1^e \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>e-\pi-1$$

β' τρόπος:

Επειδή για κάθε $x\in[1,e]\subset[0,\pi]$ ισχύει $\eta\mu x<x \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu x}{x}<1 \Leftrightarrow \dfrac{-\eta\mu x}{x}>-1 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}>-1$ άρα:

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>-\int_1^e dx \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>1-e>e-\pi-1 \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>e-\pi-1$$

γ' τρόπος:

Επειδή για κάθε $x\in[1,e]\subset[0,\pi]$ ισχύει $\eta\mu x\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{-\eta\mu x}{x}\ge-\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}\ge-\dfrac{1}{x}$

και αφού η ισότητα δεν ισχύει πάντα στο $[1,e]$ π.χ. για την τιμή $\dfrac{\pi}{4}$ άρα:

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e -\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>[-\ln x]_1^e \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>-1>e-\pi-1 \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>e-\pi-1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ ως άρρητη και στο $(0,\pi]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων (εκθετικής και τριγωνομετρικής).

Θα εξετάσουμε την f ως προς τη συνέχεια στο 0. Είναι:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\sqrt[3]{x^4}=0\ ,\quad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(e^x\eta\mu x\right)=1\cdot0=0 \text{ και } f(0)=e^0\eta\mu0=0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$ οπότε η f είναι συνεχής στο 0 και άρα είναι συνεχής στο $[-1,\pi]$.

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η f' και σ' αυτά που η f δεν είναι παραγωγίσιμη.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{(-x)^4}}{-(-x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-(-x)}=\lim_{x\to 0^-}\left(-(-x)^{\frac{1}{3}}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(-\sqrt[3]{-x}\right)=0$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x ημx}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x\,\frac{ημx}{x}\right)=1\cdot 1=1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,0)$ ως άρρητη με:

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^4}\right)'=\left(\sqrt[3]{(-x)^4}\right)'=\left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)'=\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}(-x)'=-\frac{4\sqrt[3]{-x}}{3}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων (εκθετικής και τριγωνομετρικής) με:

$$f'(x)=\left(e^x ημx\right)'=(e^x)'ημx+e^x(ημx)'=e^x ημx+e^x συνx=e^x(ημx+συνx).$$

$$\text{Άρα: } f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{4\sqrt[3]{-x}}{3}, & x\in[-1,0)\\ e^x(ημx+συνx), & x\in(0,\pi]\end{cases}.$$

Οι ρίζες της f' είναι:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{4\sqrt[3]{-x}}{3}=0\Leftrightarrow x=0 \quad \text{απορ.}, & x\in[-1,0)\\ e^x(ημx+συνx)=0\Leftrightarrow ημx+συνx=0\Leftrightarrow ημx=-συνx\Leftrightarrow σφx=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}, & x\in(0,\pi]\end{cases}$$

Άρα η f' έχει μοναδική ρίζα την $x=\frac{3\pi}{4}$.

Επομένως τα κρίσιμα σημεία της f είναι το 0 και το $\frac{3\pi}{4}$.

Δ2. Ο πίνακας μεταβολών προσήμου της f' και μονοτονίας της f είναι:

	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$-\frac{4\sqrt[3]{-x}}{3}$		−					
$e^x(ημx+συνx)$				+	0	−	
f'		−		+	0	−	
f		↘		↗		↘	
	Τ.Μ.		Τ.Ε.		Τ.Μ.		Τ.Ε.

Επειδή $f'(x)<0$ στο $(-1,0)$ και στο $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ και f συνεχής στο $[-1,0]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$ και στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$. Επειδή $f'(x)>0$ στο $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ και f συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$.

Επειδή $f'(x)<0$ στο $(-1,0)$ και $f'(x)>0$ στο $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ και το 0 κρίσιμο σημείο άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$.
Επειδή $f'(x)>0$ στο $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ και $f'(x)<0$ στο $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ και το $\frac{3\pi}{4}$ κρίσιμο σημείο άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\frac{3\pi}{4}$ το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Επειδή $f'(x)<0$ στο $(-1,0)$ και το -1 είναι άκρο κλειστού διαστήματος του πεδίου ορισμού της f άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 το $f(-1)=1$.
Επειδή $f'(x)<0$ στο $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ και το π είναι άκρο κλειστού διαστήματος του πεδίου ορισμού της f άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο π το $f(\pi)=0$.

Επειδή ισχύει $0\le f(x)\le e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$ για κάθε $x\in[-1,\pi]$ άρα το $f(0)=f(\pi)=0$ είναι ολικό ελάχιστο και το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι ολικό μέγιστο της f.

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το: $f([-1,\pi])=\left[0,e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Δ3. Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)=e^x ημx-e^{5x}=e^x(ημx-e^{4x})$, $x\in[0,\pi]$.

α' τρόπος
Για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύει: $0\le ημx\le 1\Rightarrow ημx\le 1$

Για κάθε $x\in[0,\pi]$ είναι: $0\le x\le\pi\Leftrightarrow 0\le 4x\le 4\pi\Leftrightarrow e^0\le e^{4x}\le e^{4\pi}\Leftrightarrow 1\le e^{4x}\le e^{4\pi}\Leftrightarrow$
$-1\ge -e^{4x}\ge -e^{4\pi}\Rightarrow -e^{4x}\le -1$

Άρα: $ημx-e^{4x}\le 1-1\Leftrightarrow ημx-e^{4x}\le 0\Leftrightarrow e^x(ημx-e^{4x})\le 0\Leftrightarrow h(x)\le 0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$

β' τρόπος

Η συνάρτηση $φ(x)=ημx-e^{4x}$, $x\in[0,\pi]$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με:
$φ'(x)=συνx-4e^{4x}$ και $φ''(x)=-ημx-16e^{4x}\le 0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$.
Άρα η φ' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$ οπότε:
για κάθε $0\le x\le\pi\Leftrightarrow φ'(0)\ge φ'(x)\Leftrightarrow φ'(x)\le φ'(0)\Leftrightarrow φ'(x)\le -3<0\Rightarrow φ'(x)<0$.

Άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$ οπότε:
για κάθε $0\le x\le\pi\Leftrightarrow φ(0)\ge φ(x)\Leftrightarrow φ(x)\le φ(0)\Leftrightarrow φ(x)\le -1<0\Rightarrow φ(x)<0\Leftrightarrow$
$ημx-e^{4x}<0\Leftrightarrow e^x(ημx-e^{4x})<0\Leftrightarrow h(x)<0$

Έχουμε:

$$\int_0^\pi e^{5x}dx = \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^\pi = \frac{e^{5\pi}-1}{5} \qquad \text{και}$$

$$I = \int_0^\pi e^x \eta\mu x dx \Leftrightarrow I = \int_0^\pi (e^x)'\eta\mu x dx \Leftrightarrow I = \left[e^x \eta\mu x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x(\eta\mu x)'dx \Leftrightarrow I = 0 - \int_0^\pi e^x \sigma\upsilon\nu x dx \Leftrightarrow$$

$$I = -\int_0^\pi (e^x)'\sigma\upsilon\nu x dx \Leftrightarrow I = -\left[e^x \sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x(\sigma\upsilon\nu x)'dx \Leftrightarrow I = e^\pi + 1 + \int_0^\pi e^x(-\eta\mu x)dx \Leftrightarrow$$

$$I = e^\pi + 1 - \int_0^\pi e^x \eta\mu x dx \Leftrightarrow I = e^\pi + 1 - I \Leftrightarrow 2I = e^\pi + 1 \Leftrightarrow I = \frac{e^\pi+1}{2} \Leftrightarrow \int_0^\pi e^x \eta\mu x dx = \frac{e^\pi+1}{2}$$

Το ζητούμενο εμβαδόν Ε είναι:

$$E = \int_0^\pi |h(x)|dx = \int_0^\pi -h(x)dx = \int_0^\pi \left(e^{5x} - e^x\eta\mu x\right)dx = \int_0^\pi e^{5x}dx - \int_0^\pi e^x\eta\mu x dx = \frac{e^{5\pi}-1}{5} - \frac{e^\pi+1}{2}$$

Δ4. Επειδή το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ είναι ολικό μέγιστο της f άρα για κάθε $x \in [-1,\pi]$ ισχύει:

$f(x) \le f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right) - f(x) \ge 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\frac{3\pi}{4}$.

Επίσης είναι: $\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 \ge 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\frac{3\pi}{4}$.

Η δοσμένη εξίσωση για κάθε $x \in [-1,\pi]$ γράφεται ισοδύναμα:

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow f(x) - \frac{(4x-3\pi)^2}{16} = e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{8\sqrt{2}}{16} \Leftrightarrow$$

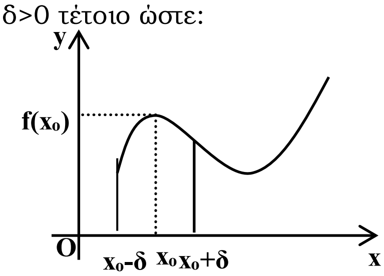
$$f(x) - \left(\frac{4x-3\pi}{4}\right)^2 = e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow f(x) - \left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left(f\left(\frac{3\pi}{4}\right) - f(x)\right) + \left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(\frac{3\pi}{4}\right) - f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} \\ \kappa' \\ \left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

<u>**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 5/9/2017**</u>

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω ότι η f παρουσιάζει στο x_o τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_o είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε: $(x_o-\delta, x_o+\delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \le f(x_o)$ για κάθε $x \in (x_o-\delta, x_o+\delta)$.



Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o ισχύει:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

— Αν $x \in (x_o-\delta, x_o)$ τότε: $\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \ge 0$, οπότε $f'(x_o) = \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \ge 0$ (1)

— Αν $x \in (x_o, x_o+\delta)$ τότε: $\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \le 0$, οπότε $f'(x_o) = \lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \le 0$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $f'(x_o)=0$.

Ανάλογη είναι η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο.

Α2. α. Ψ

β. Η πρόταση είναι ψευδής γιατί το σημείο αυτό είναι πιθανή θέση σημείου καμπής. Ως αντιπαράδειγμα παίρνουμε την συνάρτηση $f(x)=x^4$ η οποία έχει παράγωγο $f'(x)=4x^3$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο **R** οπότε η f είναι κυρτή στο **R** και άρα δεν έχει σημεία καμπής. Η δεύτερη παράγωγος όμως $f''(x)=12x^2$ είναι θετική στο **R**–{0} και $f''(0)=0$. Ισχύει δηλ. $f''(x) \ge 0$ για κάθε $x \in$ **R**.

Α3. δ

Α4. α) Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το τρίγωνο ΕΖΒ είναι ορθογώνιο. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα θα 'ναι:

$$EZ^2 = EB^2 + BZ^2 \Leftrightarrow EZ^2 = x^2 + (2-x)^2 \Leftrightarrow EZ^2 = x^2 + 4 - 4x + x^2 \Leftrightarrow EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4 \overset{EZ>0}{\Leftrightarrow}$$
$$EZ = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$$

Β2. Το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι: (ΕΖΗΘ)=$EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4$.
Άρα η συνάρτηση f που δίνει το εμβαδόν του ΕΖΗΘ είναι:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4,\ 0 \le x \le 2$$

Β3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ ως πολυωνυμική με: $f'(x)=(2x^2-4x+4)'=4x-4$

Οι ρίζες της f' είναι: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x-4=0 \Leftrightarrow x=1$

Ο πίνακας μεταβολής προσήμου της f' και μονοτονία της f είναι:

	0		1		2
f'		−	0	+	
f		↘		↗	
	Ο.Μ.		Ο.Ε.		Ο.Μ.

Επειδή $f'(x)<0$ στο $(0,1)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ και επειδή $f'(x)>0$ στο $(1,2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$.

Επειδή $f'(x)<0$ στο $(0,1)$ και $f'(x)>0$ στο $(1,2)$ και $f'(1)=0$ άρα η f παρουσιάζει στο 1 ολικό ελάχιστο το $f(1)=2$.

Επειδή $f'(x)<0$ στο $(0,1)$ και το 0 είναι άκρο κλειστού διαστήματος της f άρα η f παρουσιάζει στο 0 ολικό μέγιστο το $f(0)=4$.

Επειδή $f'(x)>0$ στο $(1,2)$ και το 2 είναι άκρο κλειστού διαστήματος της f άρα η f παρουσιάζει στο 2 ολικό μέγιστο το $f(2)=4$.

Β4. Είναι: $f([0,1])=[f(1),f(0)]=[2,4]$ και $f((1,2])=\left(\lim\limits_{x\to 1^+} f(x), f(2)\right]=(2,4]$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι: $f([0,2])=[2,4]$.
Για κάθε $x\in[0,2]$ έχουμε:
$0\le x\le 2 \Leftrightarrow e^0 \le e^x \le e^2 \Leftrightarrow 1\le e^x \le e^2 \Leftrightarrow 4\le 4e^x \le 4e^2 \Leftrightarrow 5\le 4e^x+1\le 4e^2+1$.

Επειδή $(4e^x+1)\notin f([0,2])=[2,4]$ για κάθε $x\in[0,2]$ άρα δεν υπάρχει $x_o\in[0,2]$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=4e^{x_o}+1$.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,3]$ άρα θα 'ναι και συνεχής στο $[0,3]$. Για να μην ισχύει το Θ.Ε.Τ. πρέπει $f(0)=f(3) \Leftrightarrow f(3)=2$

Από το σχήμα προκύπτει ότι το δεδομένο εμβαδόν είναι:

$$E=8 \Leftrightarrow \int_0^3 |f'(x)|dx=8 \Leftrightarrow \int_0^2 -f'(x)dx+\int_2^3 f'(x)dx=8 \Leftrightarrow [-f(x)]_0^2+[f(x)]_2^3=8 \Leftrightarrow$$

$$-f(2)+f(0)+f(3)-f(2)=8 \Leftrightarrow -f(2)+2+2-f(2)=8 \Leftrightarrow -2f(2)=4 \Leftrightarrow f(2)=-2$$

Η f' όπως προκύπτει από το σχήμα είναι συνεχής στο [0,3].

Άρα: $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = f'(1) = -3$ και $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0) = 0$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{f'(1)}{\frac{1}{1}} = -3$$

και

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-2} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(f(x)-2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{f'(x)} = -\infty \text{ γιατί } \lim_{x\to 0} f'(x) = 0 \text{ και } f'(x)<0 \text{ στο } (0,2).$$

Γ2. Από το σχήμα σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών προσήμου και μονοτονίας της f' καθώς και τον πίνακα μεταβολών μονοτονίας και κυρτότητας της f.

	0		1		2		3
f'	0	−		−	0	+	
		↘		↗		↗	
f		↘		↘		↗	
		∩		∪		∪	
	Ο.Μ.		Σ.Κ.		Ο.Ε.		Ο.Μ.

Επειδή $f'(x)<0$ στο (0,2) άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,2] και επειδή $f'(x)>0$ στο (2,3) άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο [2,3].

Επειδή $f'(x)<0$ στο (0,2) και $f'(x)>0$ στο (2,3) και $f'(2)=0$ άρα η f παρουσιάζει στο 2 ολικό ελάχιστο το $f(2)=-2$.

Επειδή $f'(x)<0$ στο (0,2) και το 0 είναι άκρο κλειστού διαστήματος της f άρα η f παρουσιάζει στο 0 ολικό μέγιστο το $f(0)=2$.

Επειδή $f'(x)>0$ στο (2,3) και το 3 είναι άκρο κλειστού διαστήματος της f άρα η f παρουσιάζει στο 3 ολικό μέγιστο το $f(3)=2$.

Επειδή η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,1] άρα η f είναι κοίλη στο [0,1] και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο [1,3] άρα η f είναι κυρτή στο [1,3].

Επειδή η f είναι κοίλη στο [0,1] και κυρτή στο [1,3] άρα έχει σημείο καμπής το $(1,f(1)) \equiv (1,0)$.

Γ3.

<u>Θ. Bolzano για την f στο [2,3]</u>

- η f είναι συνεχής στο [2,3] αφού είναι παραγωγίσιμη στο [2,3]
- $f(2)f(3)=-2\cdot 2=-4<0$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο (2,3) άρα το x_o είναι μοναδικό.

Είναι: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)=0$ και

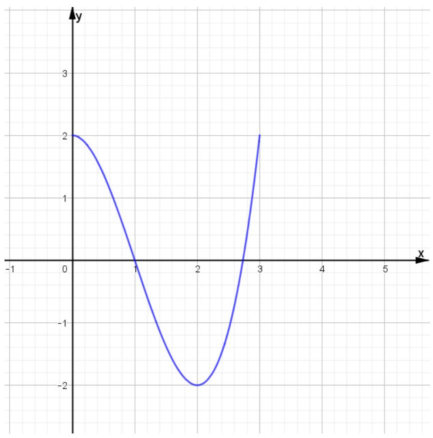
για κάθε $2<x<x_o \Rightarrow f(x)<f(x_o) \Leftrightarrow f(x)<0$

για κάθε $x_o<x<3 \Rightarrow f(x)>f(x_o) \Leftrightarrow f(x)>0$

Άρα: $\lim\limits_{x\to x_o^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_o^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ οπότε το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

Επομένως υπάρχει μοναδικό $x_o\in(2,3)$ τέτοιο ώστε το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

Γ4. Από τα αποτελέσματα του ερωτήματος **Γ2** η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω:



<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η f είναι συνεχής στο (0,2] ως πολυωνυμική. Επίσης είναι:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3-3x^2+2\right)=2=f(0)$ οπότε η f είναι συνεχής στο 0.

Άρα η f είναι συνεχής στο [0,2].

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,2) ως πολυωνυμική με $f'(x)=\left(x^3-3x^2+2\right)'=3x^2-6x$

Άρα η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο [0,2].

Δ2. Επειδή η f είναι συνεχής στο **R** άρα θα 'ναι και συνεχής στο 0 οπότε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{ημx}{x}+α\right) = 2 \Leftrightarrow -1+α=2 \Leftrightarrow α=3$$

Δ3. Η παράγωγος της f είναι: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{ημx - xσυνx}{x^2}, & -\dfrac{π}{2}<x<0 \\ 3x^2-6x, & x>0 \end{cases}$.

Θεωρούμε την συνάρτηση g(x)=ημx–xσυνx, $x\in\left(-\frac{π}{2},0\right]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{π}{2},0\right]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=xημx\geq 0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{π}{2},0\right]$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{π}{2},0\right]$.

Για κάθε $-\frac{π}{2}<x<0 \Rightarrow g(x)<g(0) \Leftrightarrow ημx - xσυνx<0 \Leftrightarrow \frac{ημx - xσυνx}{x^2}<\frac{0}{x^2} \Leftrightarrow f'(x)<0$.

Οι ρίζες της f' στο $(0,+\infty)$ είναι: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

Ο πίνακας μεταβολών προσήμου της f' και μονοτονίας της f είναι:

	$-\frac{π}{2}$	0	2 $\qquad$ $+\infty$
$\frac{ημx - xσυνx}{x^2}$	$-$		
$3x^2-6x$		$-$	0 $\quad +$
f'	$-$	$-$	0 $\quad +$
f	↘	↘	↗

Επειδή $f'(x)<0$ στο $\left(-\frac{π}{2},2\right)$ και f συνεχής στο $\left[-\frac{π}{2},2\right]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{π}{2},2\right]$. Επειδή $f'(x)>0$ στο $(2,+\infty)$ και f συνεχής στο $[2,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

Δ4. Είναι:

$$\int_{-\frac{π}{2}}^{2} f(x)dx = \int_{-\frac{π}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{-\frac{π}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2}\left(x^3-3x^2+2\right)dx = \int_{-\frac{π}{2}}^{0} f(x)dx + \left[\frac{x^4}{4}-x^3+2x\right]_0^2 =$$

$$\int_{-\frac{π}{2}}^{0} f(x)dx + 0 = \int_{-\frac{π}{2}}^{0} f(x)dx \quad (1)$$

Για κάθε $-\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \ge f(x) \ge f(0) \Leftrightarrow 3-\frac{2}{\pi} \ge f(x) \ge 2$.

Επειδή η f δεν είναι παντού ίση με 2 και με $3-\frac{2}{\pi}$ άρα:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(3-\frac{2}{\pi}\right)dx \Leftrightarrow 2\cdot\frac{\pi}{2} < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx < \left(3-\frac{2}{\pi}\right)\cdot\frac{\pi}{2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx < \frac{3\pi}{2}-1.$$

Δ5. Για κάθε $0<x<1 \Leftrightarrow 0 > -\frac{\pi}{2}x > -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2}x < 0$

και $0<x<1 \Leftrightarrow 0 > -x > -1 \Leftrightarrow e^0 > e^{-x} > e^{-1} \Leftrightarrow 1 > e^{-x} > \frac{1}{e} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2}e^{-x} < -\frac{\pi}{2e} < 0$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ οπότε είναι και 1–1.

Άρα για κάθε $x\in(0,1)$ έχουμε η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-x}\right) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} -\frac{\pi}{2}x = -\frac{\pi}{2}e^{-x} \Leftrightarrow x = e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} - x = 0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=e^{-x}-x$, $x\in(0,1)$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x)=\left(e^{-x}-x\right)' = -e^{-x}-1<0$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1).

Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^{-x}-x\right) = e^0 - 0 = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(e^{-x}-x\right) = e^{-1}-1 = \frac{1}{e}-1 = \frac{1-e}{e}$$

Το σύνολο τιμών της h στο (0,1) είναι: $h((0,1)) = \left(\lim_{x\to 1^-} h(x), \lim_{x\to 0^+} h(x)\right) = \left(\frac{1-e}{e},1\right)$

Επειδή $0\in h((0,1)) = \left(\frac{1-e}{e},1\right)$ και η h είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1) άρα υπάρχει μοναδικό $\rho\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$h(\rho)=0 \Leftrightarrow e^{-\rho}-\rho=0 \Leftrightarrow e^{-\rho}=\rho \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}e^{-\rho} = -\frac{\pi}{2}\rho \Leftrightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-\rho}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\rho\right)$$

Άρα η εξίσωση $f\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-x}\right)$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,1).