ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 18/5/2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_o)$ και η f είναι συνεχής στο x_o, η f θα' ναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_o]$ οπότε $f(x)\leq f(x_o)$.

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_o,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_o, η f θα' ναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_o,\beta)$ οπότε $f(x)\leq f(x_o)$.

Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $f(x)\leq f(x_o)$ που σημαίνει ότι το $f(x_o)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο της f.

Α2. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

__ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α

και

__ για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

Α3.

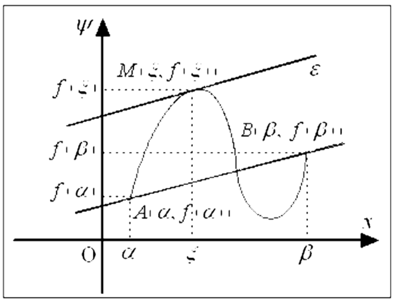
Αν μία συνάρτηση f είναι:

__ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$

__ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$



Γεωμετρικά το Θ.Μ.Τ. σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ με $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$.

Α4. **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο **R** ως ρητή με

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Οι ρίζες της f' είναι: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow x=0$.

Ο πίνακας μεταβολής προσήμου της f' και μονοτονίας της f είναι:

	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		−	0	+	
f		↘	Ο.Ε.	↗	

Επειδή $f'(x)<0$ στο $(-\infty,0)$ και f συνεχής στο $(-\infty,0]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$. Επειδή $f'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ και f συνεχής στο $[0,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Επειδή $f'(x)<0$ στο $(-\infty,0)$ και $f'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ και $f'(0)=0$ άρα η f παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$.

B2. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο **R** αφού η f' είναι ρητή με:

$$f''(x)=\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{(x^2+1)[2(x^2+1)-8x^2]}{(x^2+1)^4}=\frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^4}=\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}=$$

$$\frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$$

Οι ρίζες της f'' είναι:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}=0 \Leftrightarrow 1-3x^2=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ο πίνακας μεταβολών προσήμου της f'' και κυρτότητας της f είναι:

	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f''		−	0	+	0	-	
f		∩	Σ.Κ.	∪	Σ.Κ.	∩	

Επειδή $f''(x)<0$ στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ άρα η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και στο $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ και επειδή $f''(x)>0$ στο $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ η f είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Επειδή η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $f''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0$ και επειδή η f είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, κοίλη στο $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ και $f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0$, άρα η f έχε δύο σημεία καμπής στα σημεία $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$ και $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$.

B3. Αφού η f είναι συνεχής στο **R** άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Είναι:

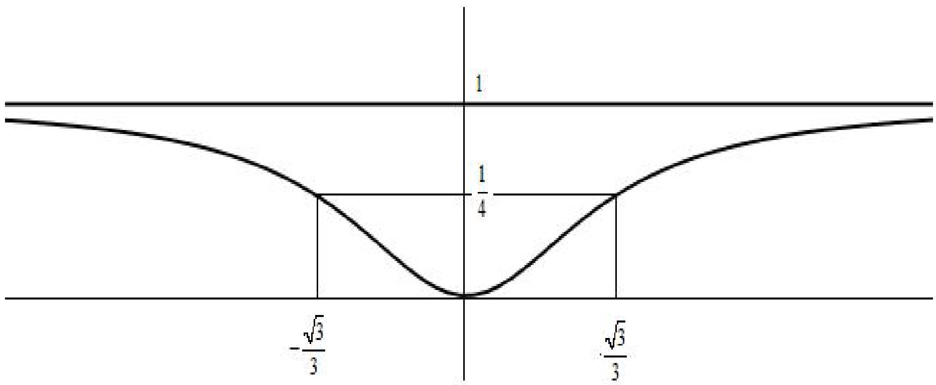
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}1=1$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}1=1$$

οπότε η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία y=1 στο $-\infty$ και το $+\infty$.

B4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=e^x-x-1$, $x\in\mathbf{R}$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο **R** ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x)=e^x-1$.

Οι ρίζες της φ' είναι: $\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

Ο πίνακας μεταβολής προσήμου της φ' και μονοτονίας της φ είναι:

	$-\infty$	0	$+\infty$
φ'	−	0	+
φ	↘	Ο.Ε.	↗

Επειδή $\varphi'(x)<0$ στο $(-\infty,0)$ και φ συνεχής στο $(-\infty,0]$ η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$. Επειδή $\varphi'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ και φ συνεχής στο $[0,+\infty)$ η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ΜΕΘΟΔΙΚΟ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ

Επειδή $\varphi'(x)<0$ στο $(-\infty,0)$ και $\varphi'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ και $\varphi'(0)=0$ άρα η φ παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο το $\varphi(0)=0$.

Για κάθε $x\in\mathbf{R}$ ισχύει $\varphi(x)\geq\varphi(0)\Leftrightarrow\varphi(x)\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x=0.

Άρα: $e^{x^2}-x^2-1=0\Leftrightarrow\varphi\left(x^2\right)=0\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$

Γ2. Για κάθε $x\in\mathbf{R}$ είναι:

$$f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2\Leftrightarrow f^2(x)=\varphi^2\left(x^2\right)\Leftrightarrow|f(x)|=\left|\varphi\left(x^2\right)\right|\overset{\varphi(x^2)\geq 0}{\Leftrightarrow}|f(x)|=\varphi\left(x^2\right)\quad(1)$$

Για x=0 από την (1) προκύπτει $|f(0)|=\varphi(0)\Leftrightarrow|f(0)|=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

Για κάθε $x\neq 0$ είναι $\varphi\left(x^2\right)\neq 0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}|f(x)|\neq 0\Leftrightarrow f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ άρα θα διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

- Αν x<0 και f(x)<0 τότε από την (1) προκύπτει $-f(x)=\varphi\left(x^2\right)\Leftrightarrow f(x)=-\varphi\left(x^2\right)$
- Αν x<0 και f(x)>0 τότε από την (1) προκύπτει $f(x)=-\varphi\left(x^2\right)$
- Αν x>0 και f(x)<0 τότε από την (1) προκύπτει $-f(x)=\varphi\left(x^2\right)\Leftrightarrow f(x)=-\varphi\left(x^2\right)$
- Αν x>0 και f(x)>0 τότε από την (1) προκύπτει $f(x)=-\varphi\left(x^2\right)$
-

Άρα όλες οι συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την δοσμένη σχέση είναι:

$$f(x)=-\varphi\left(x^2\right)\Leftrightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\ x\in\mathbf{R}$$

$$f(x)=\varphi\left(x^2\right)\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbf{R}$$

$$f(x)=\begin{cases}\varphi\left(x^2\right), & x\geq 0\\ -\varphi\left(x^2\right), & x<0\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0\\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x<0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\varphi\left(x^2\right), & x<0\\ -\varphi\left(x^2\right), & x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}e^{x^2}-x^2-1, & x<0\\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x\geq 0\end{cases}$$

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο **R** με $f'(x)=2xe^{x^2}-2x$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο **R** με $f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-2=2\left(2x^2e^{x^2}+e^{x^2}-1\right)$

Για κάθε $x\in\mathbf{R}$ ισχύει: $x^2\geq 0\Leftrightarrow e^{x^2}\geq e^0\Leftrightarrow e^{x^2}\geq 1\Leftrightarrow e^{x^2}-1\geq 0$ και $2x^2e^{x^2}\geq 0$ οπότε: $2\left(2x^2e^{x^2}+e^{x^2}-1\right)\geq 0\Leftrightarrow f''(x)\geq 0$. Άρα η f είναι κυρτή στο **R**.

Γ4. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x+3)-f(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο **R** με $g'(x)=f'(x+3)-f'(x)$.

Αφού f κυρτή στο **R** άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο **R**.

Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ισχύει $x+3>x \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x+3)>f'(x) \Leftrightarrow f'(x+3)-f'(x)>0 \Leftrightarrow g'(x)>0$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο **R** οπότε είναι και 1–1.

Για κάθε $x \geq 0$ είναι:

$$f(|ημx|+3)-f(|ημx|)=f(x+3)-f(x) \Leftrightarrow g(|ημx|)=g(x) \overset{g:1-1}{\Leftrightarrow} |ημx|=x \Leftrightarrow |ημx|=|x|.$$

Επειδή για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $|ημx| \leq |x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x=0, άρα η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την x=0.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{ημx} \Leftrightarrow f(x)=g(x)ημx$ για $x \neq 0$ κοντά στο 0 με $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$.

Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο **R** άρα θα' ναι και συνεχής στο **R** οπότε:

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(g(x)ημx)=1\cdot 0=0$.

Είναι:

$$\int_0^{π}(f(x)+f''(x))ημx dx=π \Leftrightarrow \int_0^{π}(f(x)\cdot ημx+f''(x)\cdot ημx)dx=π \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{π} f(x)\cdot ημx dx+\int_0^{π} f''(x)\cdot ημx dx=π \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{π} f(x)(-συνx)' dx+\int_0^{π}(f'(x))' ημx dx=π$$

$$\Leftrightarrow [-συνx f(x)]_0^{π}-\int_0^{π} -συνx f'(x)dx+[ημx f'(x)]_0^{π}-\int_0^{π}(ημx)' f'(x)dx=π \Leftrightarrow$$

$$f(π)+f(0)+\int_0^{π} συνx f'(x)dx+0-0-\int_0^{π} συνx f'(x)dx=π \Leftrightarrow f(π)+f(0)=π \Leftrightarrow f(π)=π.$$

Επίσης είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)ημx}{x}=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\frac{ημx}{x}\right)=1\cdot 1=1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$.

Δ2. Παραγωγίσουμε για κάθε $x \in \mathbf{R}$ την σχέση $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^{x}$.

Είναι: $(e^{f(x)}+x)'=(f(f(x))+e^{x})' \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)+1=f'(f(x))f'(x)+e^{x}$, (1) $\quad x \in \mathbf{R}$.

Έστω ότι η f έχει στο $x_o \in \mathbf{R}$ τοπικό ακρότατο, οπότε σύμφωνα με το Θ. Fermat θα' ναι $f'(x_o)=0$.

Για $x=x_o$ στην σχέση (1) έχουμε:

$e^{f(x_o)}f'(x_o)+1=f'(f(x_o))f'(x_o)+e^{x_o} \Leftrightarrow 0+1=0+e^{x_o} \Leftrightarrow e^{x_o}=e^o \Leftrightarrow x_o=0$

Άρα $f'(x_o)=f'(0) \Leftrightarrow 0=1$ που είναι άτοπο.

Άρα η f δεν έχει ακρότατα στο **R**

Δ3. Επειδή η $f'(x)\neq 0$ στο **R** και f' συνεχής στο **R** (αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο **R**) θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο **R** και επειδή $f'(0)=1>0$ άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in$ **R**.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο **R**.

Δ4. Για κάθε $x>0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0$.

Αφού f(**R**)=**R** και f γνησίως αύξουσα στο **R** άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Για κάθε x>0 ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} -1\le ημx\le 1 \\ κ' \\ -1\le συνx\le 1\end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} -2\le ημx+συνx\le 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{f(x)}\le\frac{ημx+συνx}{f(x)}\le\frac{2}{f(x)}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{f(x)}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{f(x)}=0$ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα' ναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ημx+συνx}{f(x)}=0$$

Δ5. Στο ολοκλήρωμα $\int_1^{e^π}\frac{f(\ln x)}{x}dx$ θέτουμε $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$, οπότε για x=1 είναι u=0 και για $x=e^π$ είναι u=π. Άρα $\int_1^{e^π}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^π f(u)du$.

Για κάθε $0\le u\le π \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(0)\le f(u)\le f(π) \Leftrightarrow 0\le f(u)\le π$.
Επειδή η f(x) δεν είναι παντού ίση με μηδέν στο **R** αφού f(π)=π και η f(x)–π δεν είναι επίσης παντού ίση με μηδέν αφού f(0)–π=–π άρα:

$$\begin{cases}\int_0^π f(u)du>0 \\ κ' \\ \int_0^π (f(u)-π)du<0 \Leftrightarrow \int_0^π f(u)du-π\int_0^π du<0 \Leftrightarrow \int_0^π f(u)du-π^2<0 \Leftrightarrow \int_0^π f(u)du<π^2\end{cases}.$$

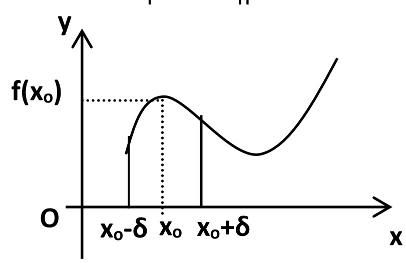
Επομένως $0<\int_0^π f(u)du<π^2 \Leftrightarrow 0<\int_1^{e^π}\frac{f(\ln x)}{x}dx<π^2$.

ΜΕΘΟΔΙΚΟ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ) 9/6/2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω ότι η f παρουσιάζει στο x_o τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_o είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε:



$(x_o-\delta, x_o+\delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \le f(x_o)$ για κάθε $x \in (x_o-\delta, x_o+\delta)$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o ισχύει:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

— Αν $x \in (x_o-\delta, x_o)$ τότε: $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \ge 0$, οπότε $f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o^-} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \ge 0$ (1)

— Αν $x \in (x_o, x_o+\delta)$ τότε: $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \le 0$, οπότε $f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o^+} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \le 0$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $f'(x_o)=0$.

Ανάλογη είναι και η απόδειξη αν η f παρουσιάζει στο x_o τοπικό ελάχιστο.

Α2. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν:

— $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_o

και

— $\lim\limits_{x \to x_o} h(x) = \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \ell$

τότε υπάρχει το όριο της f στο x_o και ισχύει: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell$.

Α3. Αν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$, τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Α4. α. Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πεδίο ορισμού D_f της f είναι: $D_f = (1,5) \cup (5,9]$.

Το σύνολο τιμών $f(D_f)$ της f είναι: $f(D_f) = (-2,1] \cup (2,4] \cup [0,3) \cup \{3\} \cup (4,5] = (-2,5]$

Β2. α. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$

β. Είναι: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1 \\ \text{και} \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2 \end{cases}$, οπότε $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ και άρα το $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ δεν υπάρχει.

γ. Είναι: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 3 \\ \text{και} \\ \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = 3 \end{cases}$, οπότε $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3$ και άρα $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 3$.

δ. Είναι: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 7^-} f(x) = 2 \\ \text{και} \\ \lim\limits_{x \to 7^+} f(x) = 4 \end{cases}$, οπότε $\lim\limits_{x \to 7^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 7^+} f(x)$ και άρα το $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$ δεν υπάρχει.

ε. $\lim\limits_{x \to 9^-} f(x) = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 9} f(x) = 3$.

Β3. α. Είναι: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0 \\ \text{και} \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0 \end{cases}$, οπότε $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$ και άρα $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$.

Επομένως: $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$ αφού f(x)<0 για κάθε x<2 κοντά στο 2 και $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ αφού f(x)>0 για κάθε x>2 κοντά στο 2, οπότε $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{f(x)} \neq \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{f(x)}$ και άρα το $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

β. Είναι: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=0 \\ \text{και} \\ \lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=0 \end{cases}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=0$ και άρα $\lim\limits_{x\to 6} f(x)=0$.

Επομένως: $\lim\limits_{x\to 6^-}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ αφού f(x)>0 για κάθε x<6 κοντά στο 6 και $\lim\limits_{x\to +^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ αφού f(x)>0 για κάθε x>6 κοντά στο 6, οπότε $\lim\limits_{x\to 6^-}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 6^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ και άρα $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

γ. Είναι: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 8^-} f(x)=5 \\ \text{και} \\ \lim\limits_{x\to 8^+} f(x)=5 \end{cases}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 8^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 8^+} f(x)=5$ και άρα $\lim\limits_{x\to 8} f(x)=5$.

Επομένως: $\lim\limits_{x\to 8} f(f(x)) \overset{u=f(x)}{=} \lim\limits_{u\to 5} f(u)=3$.

Β4. Για τα σημεία της f που ανήκουν στο D_f έχουμε:

— $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)\neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ άρα η f δεν είναι συνεχής στο 3.

— $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)\neq f(7)$ άρα η f δεν είναι συνεχής στο 7.

Β5. Αφού η f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στα σημεία (4,4), (6,0) (8,5) άρα ο συντελεστής διεύθυνσης αυτών των εφαπτομένων στα παραπάνω σημεία θα είναι ίσος με μηδέν, οπότε $f'(4)=f'(6)=f'(8)=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο **R** ως πολυωνυμική με $f'(x)=3x^2\geq 0$ για κάθε $x\in$ **R**, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο **R** άρα και 1–1.

Είναι: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} x^3=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} x^3=+\infty$

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1} της f είναι το σύνολο τιμών της, οπότε:

$D_{f^{-1}} = f(\mathbf{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty) = \mathbf{R}$.

Θέτουμε στην f όπου x το $f^{-1}(x)$ οπότε έχουμε:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = \left(f^{-1}(x)\right)^3 \Leftrightarrow \left(f^{-1}(x)\right)^3 = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \ge 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}.$$

Γ2. Έστω $g(x)= ημx + \frac{1}{6}x^3 - x$, $x \ge 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $g'(x)= συνx + \frac{1}{2}x^2 - 1$

Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $g''(x)=-ημx+x$.

Για κάθε x>0 ισχύει: $|ημx| < x \Leftrightarrow -x < ημx < x \Leftrightarrow -ημx + x > 0 \Leftrightarrow g''(x) > 0$.

Άρα η g΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε x>0 $\overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow} g'(x) > g'(0) \Leftrightarrow g'(x) > 0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε x>0 $\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow ημx + \frac{1}{6}x^3 - x > 0 \Leftrightarrow ημx > x - \frac{1}{6}x^3 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(ημx) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$.

Γ3. Είναι $y(t)=x^3(t)$, $t \ge 0$. Ισχύει:

$$y'(t)=x'(t) \Leftrightarrow \left(x^3(t)\right)' = x'(t) \Leftrightarrow 3x^2(t)x'(t) = x'(t) \Leftrightarrow 3x^2(t) = 1 \Leftrightarrow x^2(t) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x(t) = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Γ4. Αφού g άρτια στο **R** άρα για κάθε $x,-x \in \mathbf{R}$ ισχύει: $g(-x)=g(x)$.

Είναι: $I= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} x^3 g(x)dx$

Θέτουμε $x=-u$, οπότε $dx=-du$.

Για $x=-1$ προκύπτει $u=1$ και για $x=1$ προκύπτει $u=-1$.

Άρα: $I=-\int_{1}^{-1}(-u)^3 g(-u)du=-\int_{1}^{-1}-u^3 g(u)du=-\int_{-1}^{1}f(u)g(u)du=-I$

Επομένως : $I=-I \Leftrightarrow 2I=0 \Leftrightarrow I=0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0,1)\cup(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Εξετάζουμε την f ως προς τη συνέχεια στο 1. Είναι:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)=\frac{0}{1}+1=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{x-1}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1 \quad \text{και} \quad f(1)=1,$$

άρα η f είναι συνεχής στο 1.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ θα αναζητήσουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0. Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x}+1\right)=(-\infty)\cdot(+\infty)+1=-\infty.$$

Άρα η x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Δ2. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι εκείνα στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f για τα οποία η f' είναι μηδέν. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{\ln x}{x}+1-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{x^2-x}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{(\ln x)'}{(x^2-x)'}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{x}}{2x-1}=\frac{\frac{1}{1}}{2\cdot 1-1}=1 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{(\ln x-x+1)'}{((x-1)^2)'}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}\overset{DLH}{=}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)'}{\left(2(x-1)\right)'}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{2}=\frac{-\frac{1}{1}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\ln x}{x^2}, & 0<x<1\\[2ex] \dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}, & x>1\end{cases}.$$

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι lnx<0 οπότε $\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow f'(x)>0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=1-\dfrac{1}{x}-\ln x$, $x\geq 1$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-x}{x^2}<0$ για κάθε x>1.

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ οπότε:

Για κάθε $x>1\overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(1)\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x}-\ln x<0\Leftrightarrow\dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}<0\Leftrightarrow f'(x)<0$.

Άρα για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι $f'(x)\neq 0$ οπότε η f δεν έχει κρίσιμο σημείο στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Επομένως το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι στο $x_1=1$.

Δ3. i. Επειδή f'(x)>0 στο (0,1) άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1] και επειδή f'(x)<0 στο $(1,+\infty)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα (0,1) και $[1,+\infty)$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{0}{1}=0 \text{ και } \lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)=1$$

$f((0,1))=\left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x)\right)=(-\infty,1)$ και $f([1,+\infty))=\left(\lim_{x\to +\infty} f(x), f(1)\right]=(0,1]$

Επειδή $0\in f((0,1))$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$.

Επειδή $0\notin f([1,+\infty))$ άρα η f δεν έχει ρίζες στο $[1,+\infty)$.

Άρα η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,+\infty)$.

ii. Για κάθε $x_o\le x\le 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)\ge f(x_o)\Leftrightarrow f(x)\ge 0$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E=\int_{x_o}^{1}|f(x)|dx=\int_{x_o}^{1}f(x)dx=\int_{x_o}^{1}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)dx=\left[\frac{\ln^2 x}{2}+x\right]_{x_o}^{1}=\frac{\ln^2 1}{2}+1-\frac{\ln^2 x_o}{2}-x_o=1-\frac{\ln^2 x_o}{2}-x_o.$$

Όμως είναι $f(x_o)=0$ $\frac{\ln x_o}{x_o}+1=0\Leftrightarrow \ln x_o+x_o=0\Leftrightarrow \ln x_o=-x_o$.

Άρα $E=1-\frac{(-x_o)^2}{2}-x_o=\frac{2-x_o^2-2x_o}{2}$.

Δ4. Αφού F παράγουσα της f στο $[1,+\infty)$ άρα $F'(x)=f(x)$, $x\ge 1$.

<u>Θ.Μ.Τ. για την F στα $[1,x]$ και $[x,x^2]$ με $x>1$</u>

__ η F είναι συνεχής στα $[1,x]$ και $[x,x^2]$ αφού είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$

__ η F είναι παραγωγίσιμη στα $(1,x)$ και (x,x^2)

Άρα:

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(1,x)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi_1)=\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\Leftrightarrow f(\xi_1)=\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

και

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(x,x^2)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi_2)=\frac{F(x^2)-F(x)}{x^2-x}\Leftrightarrow f(\xi_2)=\frac{F(x^2)-F(x)}{x(x-1)}$

ΜΕΘΟΔΙΚΟ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ

Για κάθε x>1 η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε για κάθε x> είναι:

$$\xi_1 < \xi_2 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(\xi_1) > f(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{F(x)-F(1)}{x-1} > \frac{F(x^2)-F(x)}{x(x-1)} \Leftrightarrow F(x)-F(1) > \frac{F(x^2)-F(x)}{x} \Leftrightarrow$$

$$xF(x)-xF(1) > F(x^2)-F(x) \Leftrightarrow xF(x)+F(x) > xF(1)+F(x^2) \Leftrightarrow (x+1)F(x) > xF(1)+F(x^2)$$